Notas sobre Frank Jones, Lebesgue Integration on Euclidean Spaces

Pedro Henrique Antunes de Oliveira

Sumário

1 Capítulo 9 - Problema 28

Ponha $\phi(a) = 1/\Gamma(a)$ para $a \notin (\mathbb{R} \setminus -\mathbb{N}_0)$ e $\phi(a) = 0$ caso $a \in \mathbb{N}_0$. Perceba que para $k \in \mathbb{N}$ e para $a \in (-k-1, +\infty)$, tem-se $a+k+1 > 0$ e logo pode-se afirmar
$$\phi(a) = \frac{a(a+1)(a+2)...(a+k)}{\Gamma(a+k+1)}.$$
Assim, ϕ é C^∞ em todo $(-k-1, +\infty)$. Sendo $k \in \mathbb{N}$ qualquer, ϕ é C^∞.

2 Capítulo 9 - Problema 31

Seguem as principais observações sobre a resolução do problema (o que falta é, essencialmente, detalhe técnico). Para $n \in \mathbb{N}$ e $a \in (-n-1, 1)$, tem-se $a+n+1 > 0$ e

$$\phi(a) = \Gamma(a+n+1)\Gamma(1-a)\frac{\sin(\pi a)}{a(a+1)...(a+n)}$$

para cada $a \notin \{0, -1, ..., -n\}$ e, $\phi(a) = \pi$ caso $a \in \{0, -1, ..., -n\}$. Pondo $\psi_i(a) = \frac{\sin(\pi a)}{a+i}$ para $a \neq -i$ e $\psi_i(a) = (-1)^i\pi$ para $a = -i$, é fácil ver que $\psi_i(a) = (-1)^i\psi_0(a+i)$. Fazendo a expansão de sin em série de potências, é fácil ver também que $\psi_0(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-i)^i(\pi)^{2i+1}t^{2i}}{(2i+1)!}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Daí ψ_0 é C^∞.

3 Capítulo 10 - Problema 3

O que importa aqui é que a função exp é estritamente convexa. Assim, para todo $t \in [0, 1]$ e para todo par $x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(tx + (1-t)y) \leq te^x + (1-t)e^y$, sendo que a igualdade vale se, e somente se, $t = 0$, $t = 1$ ou $x = y$.

Isso nos dá uma outra forma de provar $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, sendo $p \in [1, \infty)$, $q = p'$, $a, b \in [0, \infty)$. Trate o caso $a = 0$ ou $b = 0$ separadamente. Para tratar o caso em que $a > 0$ e $b > 0$, ponha $a^p = e^x$, $b^q = e^y$ e $t = \frac{1}{p}$. Use a convexidade de exp. Destaca-se que pode-se concluir, usando a convexidade estrita de exp, que a igualdade em $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$, dentro das condições acima, vale se, e somente se,

$a > 0$, $b > 0$ e $p \log a = q \log b$, ou seja, $a^p = b^q$ (note que como $p, q > 1$, $0^p = 0^q = 1$ e, por isso, não se tem a igualdade quando $a = 0$ ou $b = 0$).

A resolução do problema então é motivada pela prova da desigualdade de Hölder, tendo em mente as observações acima. O caso em que $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$ é trivial pois neste caso uma das funções é zero para μ-quase todo ponto de seu domínio e logo vale $f(t)^p = g(t)^q$ para μ-quase todo $t \in X$ a menos de uma constante multiplicativa pois pode-se escolher esta constante igual a zero. Suponha daqui pra frente que $\|f\|_p \neq 0$ ou $\|g\|_q \neq 0$. Ponha $A(t) = \frac{f(t)g(t)}{\|f\|_p \|g\|_q}$ e $B(t) = \frac{f(t)^p}{p\|f\|_p} + \frac{g(t)^q}{q\|g\|_q}$. Usando o que foi feito acima, concluímos que $A(t) \leq B(t)$ para todo $t \in X$ (use $a = {}^{f(t)}/_{\|f\|_p}$, $b = {}^{g(t)}/_{\|g\|_q}$ e ${}^1/_p$ como o coeficiente da combinação convexa) sendo que temos a igualdade para um certo $t \in X$ se, e somente se, $\frac{f(t)^p}{\|f\|_p^p} = \frac{g(t)^q}{\|g\|_q^q}$. Assim, para resolver o problema, basta ver que $\int_X fg d\mu = \|f\|_p \|g\|_q$ implica em $A(t) = B(t)$ para μ-quase todo $t \in X$.

Seja $M = \{t \in X : A(t) < B(t)\}$. Ponha, para $n \in \mathbb{N}$, $D_n = \{t \in X : B(t) - A(t) \geq {}^1/_n\}$. Temos $M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$. Caso M não seja de medida nula, certamente há $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(D_n) > 0$. Assim $\int_X (B - A) d\mu \geq \frac{1}{n}\mu(D_n) > 0$. Isso implica em $\int_X fg d\mu < \|f\|_p \|g\|_q$, uma contradição. Logo $\mu(M) = 0$ e fica resolvido o problema.

Note que o desenvolvimento aqui mostra que (ainda assumindo $f, g \geq 0$):

1. Se $f(t) = 0$ para μ-quase todo $t \in X$, tem-se $\int fg d\mu = \|f\|_p \|g\|_q$.

2. Se $g(t) = 0$ para μ-quase todo $t \in X$, tem-se $\int fg d\mu = \|f\|_p \|g\|_q$.

3. Se $\|f\|_p \neq 0$ e $\|g\|_q \neq 0$, e $\frac{f(t)^p}{\|f\|_p^p} = \frac{g(t)^q}{\|g\|_q^q}$ para μ-quase todo $t \in X$, então $\int fg d\mu = \|f\|_p \|g\|_q$.

Assim, fica provado que, para o caso em que $f, g \geq 0$, $\|f\|_p \neq 0$ e $\|g\|_q \neq 0$, tem-se $\int fg d\mu = \|f\|_p \|g\|_q$ se, e somente se, $\frac{f(t)^p}{\|f\|_p^p} = \frac{g(t)^q}{\|g\|_q^q}$ para μ-quase todo $t \in X$.

4 Capítulo 10 - Problema 4

Ponha $g = \frac{f^{p/p'}}{\|f\|_p^{p/p'}}$ no caso em que $\|f\|_p \neq 0$. No caso em que $\|f\|_p = 0$, qualquer função de norma $L^{p'}$ 1 serve. Note que talvez não haja uma tal função dessas, o que pode ocorrer em espaços triviais como μ leva todo conjunto mensurável em 0 ou μ leva todo conjunto mensurável em ∞. Caso haja $A \in \mathcal{M}$ com $\mu(A) \in (0, \infty)$, então $\chi_A \in L^{p'}$ e pode-se tomar uma versão g normalizada de χ_A de modo ter $g \in L^{p'}$ e $\|g\|_{p'} = 1$

5 Capítulo 10 - Problema 18

A ideia é a seguinte. Defina $r_n = 1 - 2^{-n}$, $c_n = 4^{-n}$ e $s_n = 1 + 2^{-n}$. Ponha $f(x) = (\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{-r_n})\chi_{(0,1)}(x)$ e $g(x) = (\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^{-s_n})\chi_{(1,\infty)}(x)$. Seja $p_0 \in [1, \infty)$. Mostre que $f^{1/p_0} \in L^p(\mathbb{R})$ para todo $p \in [1, p_0]$ e $g^{1/p_0} \in L^p(\mathbb{R})$ para todo $p \in [p_0, \infty)$ ($g^{1/p_0} \in L^\infty(\mathbb{R})$ também, mas isso não nos é interessante). Seja $h = f^{1/p_0} + g^{1/p_0}$. Mostre que, dado $p \in [1, \infty)$, tem-se $h \in L^p(\mathbb{R})$ se, e somente se, $p = p_0$. Como em $(0, 1)$, h coincide com f^{1/p_0}, tem-se h fora de $L^\infty(\mathbb{R})$. Para $p_0 = \infty$, ponha $h \equiv 1$.

Retirada de https://math.stackexchange.com/questions/1039064/f-in-l1-but-f-not-in-lp-for-all-p-1

6 Capítulo 10 - Problema 21

O caso em que $f \notin L^1([0, 1])$ é trivial, assim como o caso em que $\frac{1}{f} \notin L^1([0, 1])$. Supondo que $f, \frac{1}{f} \in L^1([0, 1])$, ponha $g = \sqrt{f}$ e $h = \sqrt{\frac{1}{f}}$. Temos $g, h \in L^2([0, 1])$. Aplique o teorema da desigualdade de Hölder.

Perceba que, o resultado pode ser "generalizado"(com a mesma ideia de prova) para o intervalo de integração de 0 até $a \in \mathbb{R}$ qualquer. O que obtemos é que o produto das integrais é mair ou igual do que a^2.

7 Capítulo 10 - Problema 25

Aplique Hölder em $h_k = f_k\chi_{A^k_M}$, sendo $A^k_M = \{x \in X : |f_k(x)| > M\}$, e obtenha $\|h_k\|_1 \leq \|f_k\|_p \left\|\chi_{A^k_M}\right\|_q$, $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Temos $g_k \xrightarrow{\text{qtp}} 0$, $|g_k(x)| \leq M$ para todo $x \in X$ e $\mu(X) < \infty$. Aplique o teorema da convergência dominada de Lebesgue sobre g_k.

O resultado não vale apenas para convergência em L^1. Pode-se mostrar que a convergência acontece em todo L^q com $q \in [1, p)$. $f \in L^p$ por causa do problema 22 (como sugerido na dica) e logo está em todo L^q para $q \in [1, p)$ (por $\mu(X) < \infty$). Isso permite reduzir o caso geral para o caso em que $f \equiv 0$. Assim como acontece com f, vale que para todo $k \in \mathbb{N}$, tem-se $f_k, h_k, g_k \in L^q$ qualquer que seja $q \in [1, p)$. De resto, faz-se o mesmo que sugerido acima e na dica dada no livro. Trata-se g_k do mesmo modo (g_k limitada, $\mu(X) < \infty$ e convergência dominada de Lebesgue). Seguindo a dica do livro, no caso do h_k, faz-se essencialmente a mesma coisa, porém aplica-se Hölder para $|h_k|^q$ e obtem-se que $\||h_k|^q\|_1 = \|h_k\|_q^q \leq a^p M^{q-p}$. Sendo $g_k \xrightarrow{L^q} 0$ e $\|f_k\|_q^q = \|g_k\|_q^q + \|h_k\|_q^q \leq \|g_k\|_q^q + a^p M^{q-p}$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e $M \in (0, \infty)$, segue-se que $f_k \xrightarrow{L^q} 0$.

8 Capítulo 10 - Problema 28

Suponha $p \in (1, \infty)$. Seguindo a dica do livro, se $f \notin L^p$, então $\nu(X) = \infty$. Ponha $X = \cup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ com $\mu(A_i) < \infty$. Mostre que $|f|$ é finito para μ-quase todo $x \in X$ (tome para cada $i \in \mathbb{N}$, aplique a hipótese sobre f com g sendo χ_{A_i}) – isso só é relevante para o caso $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Ponha $B_i^\infty = A_i \cap \{x \in X : |f(x)| = \infty\}$ para cada $i \in \mathbb{N}$ (caso $f : X \to \mathbb{C}$, ignore B_i^∞) e ponha $B_i^n = A_i \cap \{x \in X : |f(x)| \leq n\}$ para cada $i, n \in \mathbb{N}$. Para $i, n \in \mathbb{N}$, $\nu(B_i^n) \leq \mu(A_i) n^p$ e $\nu(B_i^\infty) = 0$. Isso dá que $(X, (M), \nu)$ é σ-finito com $\nu(X) = \infty$. Faz sentido então usar o resultado do problema 14. Sejam Γ_i's os conjuntos que no problema 14 são chamados de B_i's. A função h da dica pode ser a seguinte: $h = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\chi_{\Gamma_i}}{i\nu(\Gamma_i)}$. Assim, a g da dica fica sendo $g = h|f|^{p-1} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{|f|^{p-1}\chi_{\Gamma_i}}{i\nu(\Gamma_i)}$. Para ver que $g \in L^{p'}$, faça as contas. Use que $\nu(\Gamma_i) \geq 1$ (ver problema 14), o que dá $\frac{\nu(\Gamma_i)}{\nu(\Gamma_i)^{p'}} \leq 1$ e use também que os Γ_i's são dois-a-dois disjuntos. No final das contas, pode-se mostrar que $\int_X |g|^{p'} d\mu \leq \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i}\right)^{p'} < \infty$. Além disso, fazendo as contas também, temos $\int_X |gf| d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = +\infty$.

No caso $p = 1$, não faz sentido tomar potências com expoente p' como em $\nu(\Gamma_i)^{p'}$, mas o argumento segue de modo análogo. Neste caso, simplesmente faça $g = h$. Sendo $g \in L^{p'} = L^{\infty}$ (para todo $x \in X$, $h(x) \leq 1$), deveríamos ter $fg \in L^1$, porém, $gf \in L^1$ implica em $\int_X |fg| d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} < \infty$ (é só fazer as contas).

Resta tratar o caso $p = \infty$. Aqui $p' = 1$. Para o caso em que $\mu(X) < \infty$, pode-se provar que $f \in L^q$ para todo $q \in [1, \infty)$. Isso é feito tomando primeiro $g \equiv 1$ e concluindo que $f \in L^1$. Depois tome $g = f$ e conclua que $f^2 \in L^1$. Siga este processo, indutivamente, e conclua que $f^n \in L^1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isso implica em $f \in L^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sendo $\mu(X) < \infty$, concluimos que $f \in L^q$ para todo $q \in [1, \infty)$. Uma abordagem, agora, é tentar provar que qualquer função ϕ mensurável num espaço de medida finito que satisfaz $\phi \in L^q$ para todo $q \in [1, \infty)$ também necessariamente satisfaz $\phi \in L^{\infty}$. Isso não é verdade de modo geral. Considere por exemplo $X = (0, 1)$ com a medida de Lebesgue em $(0, 1)$ e $\phi(x) = -\log(x)$. Temos $0 \leq -\log(x) \leq 2q \frac{1}{x^{\frac{1}{2q}}}$ para todo $q \in [1, \infty)$. Assim, $\phi \in L^q((0,1), \mathcal{L}_{(0,1)}, \lambda_{(0,1)})$ para todo $q \in [1, \infty)$ e $\phi \notin L^{\infty}$.

O que fazer no caso $p = \infty$ é o seguinte (sugestão de um tal de Gilly em ##math @ irc.freenode.com).

Rascunho

<Gilly> phao: if f is not in L^{∞}, you can pick a sequence of measurable sets A_n such that $1 > \mu(A_n) > 0$ and $f(x) \geq n$ for $x \in A_n$

<Gilly> now consider $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{A_n}}{n^2 \mu(A_n)}$

<Gilly> well, your f was complex so maybe instead choose so that $|f(x)| \geq n$

<Gilly> and add $\frac{f(x)}{|f(x)|}$ to the definition of g

Primeiro temos o problema de encontrar esses tais A_n's. Segundo é mostrar que essa $g \in L^1$. A ideia é fazer essa dica para o caso $\overline{\mathbb{R}}$ e depois tentar adaptá-la para o caso $\mathbb{C}$. A ideia do Gilly não será usada exatamente. O que será usado é uma adaptação dela.

Vamos tentar resolver (nesta caixa de rascunho) primeiro o problema de mostrar que $g \in L^1$. Primeiro, para o caso $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Defina $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ como na sugestão, ou seja, $g = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{A_n}}{n^2\mu(A_n)}$. Que g é mensurável é verdade pois é limite de funções mensuráveis. Que $g \in L^1$ é consequência do teorema da convergência monótona. Temos

$$\int_X |g| d\mu = \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{A_n}}{n^2\mu(A_n)} d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \frac{\chi_{A_n}}{n^2\mu(A_n)} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

Note que g, então, é finito para μ-quase todo $x \in X$. Poderíamos então definir $g^* : X \to \mathbb{R}$ como sendo igual a g nos pontos em que g é finita e $g^*(x) = 0$ para os valores de $x \in X$ tais que $g(x) = \infty$. Esta observação final talvez seja importante para tratar o caso $f : X \to \mathbb{C}$.

Uma pergunta é sobre a importância dos A_n's terem medida entre 0 e 1. Não é claro o motivo do Gilly ter pedido tal propriedade.

Fim do Rascunho

Temos X σ-finito. Primeiro vamos tratar o caso $f \geq 0$. Ponha $X = \cup_{i=1}^{\infty} B_i$ sendo $\mu(B_i) < \infty$ com os B_i's dois-a-dois disjuntos. Suponha $f \notin L^\infty$.

Primeiramente, para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $C_n = \{x \in X : f(x) \geq n\}$. Como $f \notin L^\infty$, temos $\mu(C_n) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Usaremos a notação $B[i : j]$ para nos referirmos ao conjunto $\cup_{k=1}^{j} B_k$, sendo $i, j \in \mathbb{N}$ e $i \leq j$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $r_k \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(B[1 : n_k] \cap C_k) > 0$. Ponha $A_k = B[1 : r_k] \cap C_k$. Temos então $0 < \mu(A_k) < \infty$. Defina $g = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\chi_{A_k}}{k^2\mu(A_k)}$. Pelo teorema da convergência monótona, $g \in L^1$ e $\|g\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Deveríamos ter $gf \in L^1$, porém:

$$\begin{aligned}
\int_X |gf| d\mu &= \int_X \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f\chi_{A_k}}{k^2\mu(A_k)} \right| d\mu \\
&= \int_X \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f\chi_{A_k}}{k^2\mu(A_k)} d\mu \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_X \frac{f\chi_{A_k}}{k^2\mu(A_k)} d\mu \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\mu(A_k)} \int_{A_k} f d\mu \\
&\geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\mu(A_k)} \int_{A_k} k d\mu \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2\mu(A_k)} k\mu(A_k) d\mu \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.
\end{aligned}$$

Assim, é um absurdo ter $f \geq 0$, $f \notin L^\infty$ concomitantemente com as hipóteses do problema sobre f. Logo, se valem as hipóteses sobre f, segue-se que $f \in L^\infty$ no caso em que $f \geq 0$. A ideia agora é reduzir o caso geral para o caso em que $f \geq 0$. Percebe que a argumentação feita acima serve tanto para o caso em que se estuda L^1 de funções reais extendidas quanto para o caso em que se estuda o L^1 de funções complexas. Daqui pra frente, trataremos os dois espaços separadamente.

Dado $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mensurável, temos $f \in L^\infty$ se, e somente se, f^+ e f^- são elementos em L^∞. Além disso, supondo que vale a hipótese do problema sobre f, tem-se que para todo $g \in L^1$, $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$, tem-se $gf \in L^1$ e, logo, $\int_X |gf| d\mu < \infty$. Sendo $\int_X |gf^+| d\mu \leq \int_X |gf| d\mu$ e $\int_X |gf^-| d\mu \leq \int_X |gf| d\mu$, segue-se que $gf^+, gf^- \in L^1$. A arbitrariedade de $g \in L^1$ dá que as hipóteses também valem, então para f^+ e f^-, o que implica em ambas estarem em L^∞ e, logo, $f \in L^\infty$.

Dado $f : X \to \mathbb{C}$, temos $f = \nu + iu$, sendo $\nu, u : X \to \mathbb{R}$ mensuráveis. Valendo a hipótese do problema para f, queremos mostrar que elas também valem para ν e u. Seja $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ em L^1. Ponha $\phi : X \to \mathbb{C}$ definida para coincidir com g onde g não se anula e ponha ϕ nula nos demais pontos. É claro que ϕ é mensurável e L^1, o que dá $\phi f \in L^1$, e, daí $\phi\nu, \phi u \in L^1$, o que implica $g\nu, gu \in L^1$. Sendo $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ arbitrário, valem as hipóteses para ν e u dentro do caso real extendido. Assim ν e u são L^∞ e, logo, $f \in L^\infty$.

9 Capítulo 10 - Problema 29

Primeiro considere o caso f, g funções reais (como $f, g \in L^p$, temos f, g finitas para μ-quase todo ponto e, assim, consideraremos f, g reais de uma vez). Revise a prova da desigualdade de Minkowski do livro e use o resultado do problema 3 do capítulo 10 (ele está resolvido neste documento) para concluir que $\frac{|f|}{\|f\|_p} = \frac{|g|}{\|g\|_p}$ para μ-quase todo ponto de X. Seja Y o conjunto de medida total que a igualdade acima ocorre. Ponha $a = \|f\|_p$ e $b = \|g\|_p$. Ponha $A = \left\{x \in Y : \frac{f(x)}{a} = \frac{g(x)}{b}\right\}$. Ponha $B = Y \setminus A$. Queremos mostrar que $\mu(B) = 0$. Suponha que $\mu(B) > 0$. Calcule $\|f + g\|_p$. Use que para todo $t \in (0, \infty)$, tem-se $|1 - t| < 1 + t$ para concluir que, caso $\mu(B) > 0$, tem-se $\|f + g\|_p < a + b$. A conta que chega no absurdo fica como segue:

$$
\begin{aligned}
\|f+g\|_p &= \left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_A |f+g|^p d\mu + \int_B |f+g|^p d\mu\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_A \left|f + \frac{b}{a} f\right|^p d\mu + \int_B \left|f - \frac{b}{a} f\right|^p d\mu\right)^{1/p} \\
&= \left((1 + {}^b/_a)^p \int_A |f|^p d\mu + |1 - {}^b/_a|^p \int_B |f|^p d\mu\right)^{1/p} \\
&< \left((1 + {}^b/_a)^p \int_A |f|^p d\mu + (1 + {}^b/_a)^p \int_B |f|^p d\mu\right)^{1/p} \qquad (*) \\
&= (1 + {}^b/_a) a = a + b.
\end{aligned}
$$

No caso f, g complexas, B é mais complicado. Na verdade, existe $\theta(x) \in [0, 2\pi)$ para cada $x \in Y$ tal que $g(x) = e^{i\theta(x)}f(x)$, sendo que $\theta(x) = 0$ para $x \in A$ e $\theta(x) \neq 0$ para $x \in B$. A ideia, no entanto, de modo geral, é a mesma. Prove que para todo $t > 0$ e para todo $\theta \in (0, 2\pi)$, tem-se $|1 + te^{i\theta}| < 1 + t$. Assim, pode-se fazer essencialmente as mesmas contas:

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p &= \left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_A |f+g|^p d\mu + \int_B |f+g|^p d\mu\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_A \left|f + \frac{b}{a}f\right|^p d\mu + \int_B \left|f + e^{i\theta(x)}\frac{b}{a}f\right|^p d\mu\right)^{1/p} \\
&= \left(\int_A \left(1 + \frac{b}{a}\right)^p |f|^p d\mu + \int_B \left|1 + e^{i\theta(x)}\frac{b}{a}\right|^p |f|^p d\mu\right)^{1/p} \\
&< \left((1 + {}^b/_a)^p \int_A |f|^p d\mu + (1 + {}^b/_a)^p \int_B |f|^p d\mu\right)^{1/p} \\
&= (1 + {}^b/_a)a = a + b.
\end{aligned}$$

Note que essas contas precisam de mais justificativas. Estamos usando que para todo $x \in B$, $\left|1 + e^{i\theta(x)}\frac{b}{a}\right| |f(x)| < \left|1 + \frac{b}{a}\right| |f(x)|$. O fato de $\mu(B) > 0$ implica então que há desigualdade estrita ao "passar a integral"(prove isso considerando, para cada $n \in \mathbb{N}$, $B_n \subset B$ conjuntos dos pontos em que a diferença do maior termo da desigualdade menos o menor termo da desigualdade acima ganha de ${}^1/_n$ – algum dos B_n tem medida positiva). Além disso, a desigualdade acima para os $x \in B$ vale pois para $x \in B$, $f(x) \neq 0$. Resta ver que, de fato, para todo $t > 0$ e para todo $\theta \in (0, 2\pi)$, tem-se $|1 + e^{i\theta}t| < 1 + t$. Isso vem do resultado análogo ao deste problema, mas para o caso mais simples de $\mathbb{C}$. Sabemos que $|z+w| = |z|+|w|$ se, e somente se, $w = \lambda z$ com $\lambda > 0$ no caso de $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pela desigualdade triangular em $\mathbb{C}$, temos $|1 + e^{i\theta}t| \leq 1 + t$. A igualdade ocorre se, e somente se, $e^{i\theta}t = \lambda 1$ para algum $\lambda > 0$. Isso é impossível para $\theta \in (0, 2\pi)$.

10 Capítulo 10 - Problema 30

Primeiro, seja $f \in L^q$ para $q \in [1, \infty)$. Queremos mostrar que $f \in L^\infty$ e $\|f\|_\infty \leq \|f\|_q$. Defina $A_n = \{x \in X : |f(x)| \in [n-1, n)\}$. Como $f \in L^q$, temos $|f|$ finito para μ-quase todo $x \in X$ (apenas relevante para o caso $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$). Caso $f \notin L^\infty$, existiriam infinitos $n \in \mathbb{N}$ tais que $\mu(A_n) > 0$ e, logo, $\mu(A_n) \geq 1$. Neste caso, teríamos

$$\int_X |f|^q d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |f|^q d\mu \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)(n-1)^q = \infty.$$

Assim, $f \in L^\infty$. Caso $\|f\|_\infty > \|f\|_q$, seja $a \in (0, \infty)$ tal que $\|f\|_\infty = \|f\|_q + a$. Seja $d \in (0, a)$. Ponha $B_d = \{x \in X : |f(x)| \in [\|f\|_\infty - d, \|f\|_\infty]\}$. Temos $\mu(B_d) > 0$, ou se não $\|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty - d$, um absurdo. Assim $\mu(B_d) \geq 1$ e

$$\|f\|_q^q \geq \int_{B^d} |f|^q d\mu \geq (\|f\|_\infty - d)^q \geq (\|f\|_q + a - d)^q > \|f\|_q^q,$$

um absurdo. Logo, de fato, $\|f\|_\infty \leq \|f\|_q$.

Segundo, para $p \in [1, \infty)$, queremos mostrar que para todo $f \in L^p$ e para todo $q \in (p, \infty)$, temos $f \in L^q$ e $\|f\|_q \leq \|f\|_p$. Já vimos que $f \in L^\infty$. Ponha $g = \frac{f}{\|f\|_\infty}$. Seja A de medida total tal que $|g(x)| \leq 1$ para todo $x \in A$. É claro que $g \in L^p$ pois $f \in L^p$. Sendo $0 < p < q$ e $|g(x)| \leq 1$ para todo $x \in A$, temos $|g(x)|^q \leq |g(x)|^p$. Assim:

$$\int_X |g(x)|^q d\mu \leq \int_X |g(x)|^p d\mu,$$

o que implica na tese.

11 Capítulo 10 - Problema 31

O que é bom ter em mente na hora de resolver este problema é que $a > 1$ e que o domínio de F é $I_a = \left(\frac{-\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a}\right)$.

Em (a), usa-se que $a > 1$ para mostrar que $F(\theta)$ existe de fato para todo $\theta \in$

I_a. Seja $K = \cos(a\theta) > 0$, por $\theta \in I_a$. Dado $x \in (0, \infty)$, temos $|f(x, \theta)| = e^{-x^a K}$. Existe $x_0 \in (0, \infty)$ tal que $e^{-x^a K} \leq e^{-Kx}$ para todo $x \in [x_0, \infty)$ pois

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{-x^a K}}{e^{-Kx}} = \lim_{x \to \infty} e^{-Kx(x^{a-1}-1)} = 0.$$

Isso resolve (a).

Em (b), faça as contas. Expanda $f = f_1 + if_2$. Use

$$f_1(x, \theta) = \exp(-x^a \cos(a\theta)) \cos(-x^a \sin(a\theta))$$

e use também que

$$f_2(x, \theta) = \exp(-x^a \cos(a\theta)) \sin(-x^a \sin(a\theta)).$$

Calcule $D_1 f = D_1 f_1 + iD_1 f_2$ e $D_2 f = D_2 f_1 + iD_2 f_2$. Compare e conclua que $D_2 f = ixD_1 f$.

Em (c), faça diferenciação sobre o sinal da integral. O que precisa ser feito aqui é o seguinte. Tome $\theta_0 \in I_a$. Existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha < \beta$, $\theta_0 \in (\alpha, \beta)$ e $\alpha, \beta \in I_a$. Considere a restrição de F ao intervalo (α, β). Use que $\theta \mapsto \cos(a\theta)$ atinge seu mínimo $m > 0$ em $[\alpha, \beta]$. Use este fato para obter a função h da proposição da diferenciação sobre o sinal da integral (o corolário última prosição do capítulo 6). Conclua que $F'(\theta) = -iF(\theta)$ para todo $\theta \in (\alpha, \beta)$, o que inclui valer para θ_0. A arbitrariedade de θ_0 resolve este item.

Em (d). Ponha $F(\theta) = y(\theta) + iz(\theta)$. Temos então que

$$y' + iz' = -i(y + iz).$$

Conclua que existe $R \in (0, \infty)$ tal que $y^2 + z^2$ é a função constante igual a R^2. Use a relação de equação diferencial acima para concluir também que $-y'z + z'y = -R^2$. Use o teorema da função ângulo, ou seja, existe $\phi : I_a \to \mathbb{R}$ (sendo ϕ com a mesma classe de diferenciabilidade de $\theta \mapsto (y(\theta), z(\theta))$ – veja "Elão", volume 2, capítulo 2) tal que $y(\theta) = R\cos(\phi(\theta))$ e $z(\theta) = R\sin(\phi(\theta))$. De $-y'z + z'y = -R^2$, conclua que existe $A \in \mathbb{R}$ tal que $\phi(\theta) = A - \theta$ para todo

$\theta \in I_a$. Isso te dá que $F(\theta) = R\exp((A-\theta)i)$. Calcule $F(0)$ e conclua que $A = 2k\pi$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Logo $F(\theta) = R\exp((2k\pi - \theta)i) = R\exp(-i\theta)$. No cálculo de $F(0)$, conclua também que $R = \int_0^\infty e^{-x^a}dx$. Faça uma substituição de variáveis $t = x^a$ e conclua que $R = \int_0^\infty \frac{1}{a}x^{\frac{1}{a}-1}e^{-x}dx = \frac{1}{a}\Gamma\left(\frac{1}{a}\right) = \Gamma\left(1+\frac{1}{a}\right)$.

12 Capítulo 10 - Problema 32

A maior sacada do exercício é esta primeira conta que faremos. O resto é detalhe técnico (estes detalhes técnicos dão trabalho, mas é um trabalho padrão comum dos exercícios de integração e não involve nenhuma ideia esperta). O único "truque"deste exercício está na seguinte conta, que começa logo abaixo e termina exatamente na, e incluindo a, parte em que fazemos uso de integração por partes. Esta conta foi uma adaptação de uma dica dada para mim por um tal de Padawanno ##math @ irc.freenode.com.

Fixe $\theta \in \left(\frac{-\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a}\right)$. Para cada $y \in [1,\infty)$, temos:

$$\begin{aligned}
\int_{1/y}^{y} \frac{-x^{-a+1}}{ae^{ia\theta}}\frac{\partial f}{\partial x}(x,\theta)dx &= \int_{1/y}^{y} \frac{ix^{-a}}{ae^{ia\theta}}ix\frac{\partial f}{\partial x}(x,\theta)dx \\
&= \int_{1/y}^{y} \frac{ix^{-a}}{ae^{ia\theta}}\frac{\partial f}{\partial \theta}(x,\theta)dx \\
&= \int_{1/y}^{y} \frac{ix^{-a}}{ae^{ia\theta}}e^{-e^{ia\theta}x^a}(-x^a)e^{ia\theta}ia\,dx \\
&= \int_{1/y}^{y} \frac{x^{-a}}{ae^{ia\theta}}e^{-e^{ia\theta}x^a}(x^a)e^{ia\theta}a\,dx \\
&= \int_{1/y}^{y} \frac{1}{ae^{ia\theta}}e^{-e^{ia\theta}x^a}e^{ia\theta}a\,dx \\
&= \int_{1/y}^{y} e^{-e^{ia\theta}x^a}dx \\
&= \int_{1/y}^{y} f(x,\theta)dx.
\end{aligned}$$

Além disso, sendo $x \in (0,\infty) \mapsto f(x,\theta) - 1$ tal que sua derivada coincide com

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\theta)$ para todo $x \in (0,\infty)$, temos (fazendo integração por partes):

$$\begin{aligned}
\int_{1/y}^{y} \frac{-x^{-a+1}}{ae^{ia\theta}}\frac{\partial f}{\partial x}(x,\theta)dx = & \left[\frac{-y^{-a+1}}{ae^{ia\theta}}(f(y,\theta)-1)\right] - \left[\frac{-\left(1/y\right)^{-a+1}}{ae^{ia\theta}}(f(1/y,\theta)-1)\right] \\
& - \int_{1/y}^{y} \frac{-(-a+1)}{ax^{a}e^{ia\theta}}(f(x,\theta)-1)dx \\
= & \left(\left[\frac{y^{a-1}}{ae^{i\theta a}}(e^{-e^{i\theta a}y^{-a}}-1)\right] - \left[\frac{y^{1-a}}{ae^{i\theta a}}(e^{-e^{i\theta a}y^{a}}-1)\right]\right) \\
& + \int_{1/y}^{y} \frac{1-a}{ax^{a}e^{ia\theta}}(f(x,\theta)-1)dx
\end{aligned}$$

De certa forma, o resto da demonstração é uma sequência de detalhes técnicos para concluir o que queremos. Primeiro, queremos mostrar que:

$$\lim_{y\geq 1; y\to\infty} y^{-a+1}(e^{-e^{i\theta a}y^{a}}-1) = 0$$

e

$$\lim_{y\geq 1; y\to\infty} y^{a-1}(e^{-e^{i\theta a}y^{-a}}-1) = 0.$$

Não farei esta conta em detalhe aqui, mas o procedimento é o seguinte. No primeiro limite mostre que o valor absoluto da expressão vai para 0. Use que, para todo $y > 0$, tem-se:

$$|y^{-a+1}(e^{-e^{i\theta a}y^{a}}-1)| \leq \frac{|e^{-y^{a}\cos(\theta a)}e^{-iy^{a}\sin(\theta a)}|}{y^{a-1}} + \frac{1}{y^{a-1}} = \frac{1}{e^{y^{a}\cos(\theta a)}y^{a-1}} + \frac{1}{y^{a-1}}$$

O segundo limite é mais enjoado. Trate separadamente as partes real e imaginária da expressão. Faça uma mudança de variáveis $h = y^{1-a}$ (de fato é $h = y^{1-a}$ e *não* $h = y^{a-1}$). Aplique o teorema da regra de L'Hospital em cada caso (veja Rudin, Principles of Mathematical Analysis, 3ª edição, Capítulo 5, Teorema 5.13). Isso resolve o problema de tratar os dois limites acima.

Agora, o que faremos é estudar as funções, para $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a}\right)$, $h_\theta, g_\theta : (0,+\infty) \to \mathbb{C}$ dadas por $g_\theta(x) = \frac{1-a}{ae^{i\theta a}}h_\theta(x)$ e $h_\theta(x) = x^{-a}(f(x,\theta)-1)$. É claro que $g_\theta \in L^1$ se, e somente se, $h_\theta \in L^1$. Ponha $h_\theta^1 = \mathrm{Re}(h_\theta)$ e $h_\theta^2 = \mathrm{Im}(h_\theta)$.

Temos

$$h_\theta^1(x) = \frac{e^{-x^a\cos(\theta a)}\cos(-x^a\sin(\theta a)) - 1}{x^a}$$

e

$$h_\theta^2(x) = \frac{e^{-x^a\cos(\theta a)}\sin(-x^a\sin(\theta a))}{x^a}.$$

Queremos mostrar que $h_\theta^1, h_\theta^2 \in L^1$ para, daí, concluir que $h_\theta \in L^1$. Para isso, basta mostrar que $h_\theta^j\chi_{(0,1]} \in L^1$ e $h_\theta^j\chi_{(1,\infty)} \in L^1$ para $j \in \{1,2\}$. Para mostrar que $h_\theta^j\chi_{(0,1]} \in L^1$, basta mostrar que $\lim_{x\to 0^+} h_\theta^j(x)$ existe e é um número real, para $j = 1, 2$. Isso de fato é verdade. Para fazer esta conta, use a mudança de variável $z = x^a$ e use o teorema de regra de L'Hospital. Agora, para ver que $h_\theta^j\chi_{(1,\infty)} \in L^1$, $j \in \{1,2\}$, considere o seguinte. Como $a > 0$, $x \in (0,\infty) \mapsto \chi_{(1,\infty)}x^{-a} \in L^1$. Além disso, para $x \geq 1$, temos

$$|e^{-x^a\cos(\theta a)}\cos(-x^a\sin(\theta a)) - 1| \leq 1 + |\cos(-x^a\sin(\theta a))||e^{-x^a\cos(\theta a)}| \leq 2$$

e

$$|e^{-x^a\cos(\theta a)}\sin(-x^a\sin(\theta a))| \leq |\sin(-x^a\sin(\theta a))||e^{-x^a\cos(\theta a)}| \leq 1.$$

Assim, fica provado que $g_\theta, h_\theta \in L^1$.

Com isso, é uma aplicação usual do teorema da convergência dominada de Lebesgue para mostrar que

$$\lim_{y\to+\infty, y\geq 1}\int_{1/y}^{y} \frac{1-a}{ax^a e^{ia\theta}}(f(x,\theta)-1)dx = \int_0^\infty g_\theta(x)dx.$$

e que

$$\lim_{y\to+\infty, y\geq 1}\int_{1/y}^{y} f(x,\theta)dx = \int_0^\infty f(x,\theta)dx = F(\theta).$$

Com o que já foi feito acima, isso nos dá

$$F(\theta) = \int_0^\infty g_\theta(x)dx = \int_0^\infty \frac{1-a}{ae^{i\theta a}}x^{-a}(f(x,\theta)-1)dx.$$

Para terminar a questão, a segunda parte é resolvida mostrando que pode-se "passar o limite para dentro da integral". Isso é o que justificaremos aqui. Considere $G : (0,\infty) \to \mathbb{C}$ dada por $G(x) = \frac{1-a}{iax^a}(e^{-ix^a} - 1)$. Seja $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ com $\theta_n \in \left(-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a}\right)$ e $\lim_{n\in\mathbb{N}} \theta_n = \frac{\pi}{2a}$, seja $g_n^* = g_{\theta_n}$. É claro que $g_n^* \to G$ pontualmente. Queremos aplicar o teorema da convergência dominada de Lebesgue em $\{g^*{}_n\}_{n=1}^{\infty}$ de modo a concluir que $\int_0^\infty g_n^*(x)dx \to \int_0^\infty G(x)dx$. A arbitrariedade de $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ implica na tese.

Basta então encontrar uma função $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ em L^1 tal que $|g_n^*(x)| \leq f(x)$ para quase todo $x \in (0,\infty)$ de acordo com a medida de Lebesgue. Vamos encontrar f de modo que isso valha para todo $x \in (0,\infty)$. Primeiro, perceba que para $x \in [1,\infty)$, temos

$$|g_n^*(x)| \leq \frac{a-1}{a}\frac{1}{x^a}\left(|e^{-e^{i\theta_n a}x^a}| + 1\right) \leq \frac{a-1}{a}\frac{2}{x^a}.$$

Temos

$$g_n^*(x) = \frac{1-a}{x^a a e^{i\theta_n a}}\left(e^{-e^{i\theta_n a}x^a} - 1\right).$$

Ponha

$$g_n^{**}(x) = \frac{1-a}{x^a a}\left(e^{-e^{i\theta_n a}x^a} - 1\right).$$

Temos $|g_n^*(x)| = |g_n^{**}(x)|$ para todo $x \in (0,\infty)$. Além disso, temos

$$\mathrm{Re}(g_n^{**}(x)) = \frac{1-a}{a}\frac{1}{x^a}\left(e^{-x^a\cos(a\theta_n)}\cos(-x^a\sin(a\theta_n)) - 1\right)$$

e

$$\mathrm{Im}(g_n^{**}(x)) = \frac{1-a}{a}\frac{1}{x^a}e^{-x^a\cos(a\theta_n)}\sin(-x^a\sin(a\theta_n)).$$

Para $x \in (0,1]$, temos $y = x^a \in (0,1]$. Daí, pelo teorema do valor médio, para um certo $\xi \in (0,y) \subset (0,1)$, temos, pondo $K_n = \cos(a\theta_n)$ e $K_n' = \sin(a\theta_n)$:

$$\begin{aligned}
|\mathrm{Re}(g_n^{**}(x))| &= \left|\frac{1-a}{a}\frac{e^{-yK_n}\cos(-yK_n') - 1}{y}\right| \\
&= \frac{a-1}{a}\left|K_n' e^{-\xi K_n}\sin(-\xi K_n') - K_n e^{-\xi K_n}\cos(-\xi K_n')\right| \\
&\leq \frac{a-1}{a}2e
\end{aligned}$$

e, também pelo teorema do valor médio, para um certo outro $\xi \in (0,1)$, temos:

$$\begin{aligned}|\mathrm{Im}(g_n^{**}(x))| &= \frac{a-1}{a}\left|\frac{e^{-yK_n}\sin(-yK_n')}{y}\right| \\ &= \frac{a-1}{a}\left|-K_n e^{-\xi K_n}\sin(-\xi K_n') - K_n' e^{-\xi K_n}\cos(-\xi K_n')\right| \\ &\leq \frac{a-1}{a}2e\end{aligned}$$

Daí $|g_n^*(x)| = |g_n^{**}(x)| \leq \frac{a-1}{a}2\sqrt{2}e$. Ponha então $f(x) = \frac{a-1}{a}2\sqrt{2}e$ para $x \in (0,1]$ e $f(x) = \frac{a-1}{a}\frac{2}{x^a}$ para $x > 1$. Temos $f \in L^1$ e $f(x) \geq |g_n^*(x)|$ para todo $x \in (0,\infty)$ e para todo $n \in \mathbb{N}$.

Isso nos permite aplicar o teorema da convergência dominada de Lebesgue e concluir a resolução.

13 Capítulo 10 - Problema 33

Segue o rascunho da resolução. O esqueleto da integração por partes é o seguinte.

$$\begin{aligned}u &= \frac{x^{-a+1}}{ia} \\ du &= \frac{1-a}{ia}x^{-a} \\ v &= e^{-ix^a} - 1 \\ dv &= e^{-ix^a}(-i)x^{a-1}a\end{aligned}$$

Fazendo a integração por partes, temos:

$$\lim_{b\to\infty; b\geq 1}\int_{\frac{1}{b}}^{b}\frac{1-a}{iax^a}(e^{-ix^a}-1)dx = \lim_{b\to\infty; b\geq 1}\left[uv|_{\frac{1}{b}}^{b} + \int_{\frac{1}{b}}^{b} e^{-ix^a}dx\right]$$

Mostre agora que $uv|_{\frac{1}{b}}^{b} \to 0$ para $b \to \infty$. Mostre primeiro que $u(b)v(b) \to 0$ quando $b \to +\infty$. Para ver que $u\left(\frac{1}{b}\right)v\left(\frac{1}{b}\right) \to 0$ quando $b \to +\infty$, faça a mudança de variáveis $y = \frac{1}{b^a}$ e note que $\frac{e^{-iy}-1}{y}$ é limitada (use o teorema do valor médio nas partes real e imaginária).

Observe que $\int_0^{\frac{1}{b}} e^{-ix^a}dx \to 0$ para $b \to +\infty$, pois

$$\left|\int_0^{\frac{1}{b}} e^{-ix^a}dx\right| \leq \int_0^{\frac{1}{b}} |e^{-ix^a}|dx = \frac{1}{b}.$$

14 Capítulo 10 - Problema 34

Achei que houvesse um erro de digitação aqui, mas não tem. Antes de provar a primeira igualdade, pode-se provar que.

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-ix^{\beta}}dx = \frac{1}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)e^{\frac{-i\pi\alpha}{2\beta}}.$$

A igualdade logo acima, consegui fazer. Use o resultado do problema anterior com $a = \frac{\beta}{\alpha}$. Abra a integral imprópria no limite e faça a substituição $y^{\alpha} = x$. Agora, para provar a igualdade do problema, observe que para todo $k \in \mathbb{R}$, $e^{-ik} = e^{i\pi}e^{ik}$. Daí, temos

$$e^{i\pi}\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{ix^{\beta}}dx = \frac{1}{\beta}\Gamma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)e^{\frac{i\pi\alpha}{2\beta}}e^{i\pi}.$$

Na segunda parte do problema, trate primeiro o caso $\xi > 0$ (use a primeira igualdade acima com $\beta = 1$ e depois faça a substituição na integral $y\xi = x$). Temos então:

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-ix\xi}dx = \frac{\Gamma(\alpha)e^{-\frac{-i\pi\alpha}{2}\mathrm{sgn}(\xi)}}{|\xi|^{\alpha}}.$$

No caso $\xi < 0$, use a igualdade principal da primeira parte (a que o livro de fato pede para ser provada) com $\beta = 1$ e depois faça a mudança, na integral, $|\xi|y = x$ (observe que $-\xi = |\xi|$). Isso dará a igualdade desejada.

15 Capítulo 10 - Problema 35

Aqui a motivação vem do exemplo padrão pro $\mathbb{R}^2$. Ponha $x = (0,1)$ e $y = (1,0)$. Por $2^{\frac{1}{p}} > 2$ (usa-se aqui $p \in (0,1)$), temos $\|x+y\|_p = 2^{\frac{1}{p}} > 2 = \|x\|_p + \|y\|_p$. Isso motiva o seguinte contra-exemplo. No caso em que o espaço de medida admita A, B conjuntos mensuráveis com $\mu(A) > 0$, $\mu(B) > 0$ e $A \cap B = \emptyset$, ponha

$x = \mu(A)^{-1}\chi_A$ e $y = \mu(B)^{-1}\chi_B$. Temos $\|x+y\|_p = 2^{\frac{1}{p}} > 2 = \|x\|_p + \|y\|_p$.

É claro que, em casos "degenerados" $\|.\|_p$ é de fato uma norma. Por exemplo, em $\mathbb{R}$, a norma-p para $p \in (0,1)$ coincide com o valor absoluto e é uma norma.

16 Capítulo 10 - Comentário Pós Problema 35

Logo depois do problema 35, o livro menciona que em casos triviais, existe uma norma que coincide com a distância dada por $d(f,g) = \|f-g\|_p^p$ $(0 < p < 1)$. O caso trivial usado como exemplo é o caso de X ser finito e a medida ser de contagem. Não faremos aqui todo este desenvolvimento, mas provaremos que, no $\mathbb{R}^n$, a topologia dada pela distância acima coincide com a da norma euclidiana $\|\cdot\|_2$.

Primeiro, defina $\phi_p(x) = \|x\|_p^p$. Temos $\lim_{x\to 0}\phi_p(x) = 0$. Assim, para todo $r > 0$, existe $s > 0$ tal que $B_2(0,s) \subset B_p^p(0,r)$ (B_2: bola de acordo com a norma euclidiana; B_p^p: bola de acordo com a distância d acima).

Seja agora $r > 0$ e seja $r' > 0$ tal que $B_\infty(0,r') \subset B_2(0,r)$ (B_∞: bola de acordo com a norma do máximo). Seja $s = (r')^p$. Seja $x \in B_p^p(0,s)$. Temos então $\sum_{i=1}^n |x_i|^p < s$ e, logo, cada $|x_i| < s^{1/p} = r'$. Isso implica em $x \in B_2(0,r)$.

A partir do que foi feito acima, é um argumento simples mostrar que a topologia dada por d e a pela norma $\|.\|_2$ coincidem. O roteiro é o que segue:

1. Mostre que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e para todo $r > 0$, existe $s > 0$ tal que $B_2(x,s) \subset B_p^p(x,r)$.

2. Mostre que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e para todo $r > 0$, existe $s > 0$ tal que $B_p^p(x,s) \subset B_2(x,r)$.

3. Tome um aberto A de acordo com a norma $\|.\|_2$. Este é a união de bolas. Para cada uma dessas bola, existe um aberto (que também é uma bola B_p^p) de acordo com a topologia da distância d subconjunto desta bola. Logo, A é a união destes abertos de acordo com a tooplogia da distância d.

4. Faça de modo análogo para mostrar que todo aberto da topologia de d é também um aberto da topologia de $\|.\|_2$.

Logo, existe uma norma cuja topologia coincide com a topologia da função distância d. Perceba que o caso X finito e μ medida de contagem com a σ-álgebra $\mathcal{M} = 2^X$, se reduz ao que foi feito acima. Ponha $a : \{1, 2, ..., \#X\} \to X$ bijeção e use o isomorfismo $\psi : \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}^{\#X}$ dado por $\psi(f) = (f(a_i))_{i=1}^{\#X}$ (ψ é isomorfismo linear e preserva tanto a distância d quanto a norma euclidiana de cada um dos respectivos espaços).

17 Capítulo 10 - Exercício 38

Primeiro, vejamos que $f \in L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ para todo $p \in (0, p_0)$, assumingo que $f \in L^{p_0}$.

Daqui pra frente, fixe $A = \{x \in X : 0 < |f(x)| \leq 1\}$ e $B = \{x \in X : 1 < |f(x)| < \infty\}$.

Suponha primeiro que $p_0 = +\infty$. Existe então $M > 0$ tal que $|f(x)| < M$ para μ-quase todo $x \in X$. Assim, dado $p \in (0, \infty)$, temos $\int |f|^p d\mu \leq \int M^p d\mu = M^p < \infty$ (lembrando que $\mu(X) = 1$). Logo $f \in L^p$.

Suponha agora que $p_0 \in (0, \infty)$ e seja $p \in (0, p_0)$. Temos $\int_A |f|^p d\mu \leq \int_A 1 d\mu = \mu(A) < \infty$. Temos $\int_B |f|^p d\mu \leq \int_B |f|^{p_0} d\mu < \infty$ (para todo $a \in (1, \infty)$, temos que $a^q < a^{q'}$ se $0 < q < q' < \infty$). Como $f \in L^{p_0}$, tem-se que $|f(x)| < \infty$ para μ-quase todo $x \in X$ (o que é relevante apenas caso f assuma valores em $\overline{\mathbb{R}}$). Assim $\int |f|^p d\mu = \int_A |f|^p d\mu + \int_B |f|^p d\mu < \infty$. Logo $f \in L^p$.

Isso resolve uma parte do problema. Antes de seguirmos com a prova do limite, mostraremos que a parte positiva de $\log |f|$ é sempre integrável de acordo com as hipóteses do problema (este comentário é feito no enunciado do problema).

Primeiro, seja $p \in (0, p_0)$ arbitrário. Temos $\int_B |f|^p d\mu < \infty$. Sabemos que $\log(|f(x)|^p) < |f(x)|^p$ para todo $x \in B$ (isso é uma propriedade geral de log: $\forall a \in (0, \infty)$, $\log(a) < a$). Assim $\log |f(x)| < \frac{1}{p}|f(x)|^p$, o que dá $\int_B \log |f| d\mu \leq \frac{1}{p} \int_B |f|^p d\mu < \infty$. Note que a integral em X da parte positiva de $\log |f|$ é exatamente $\int_B \log |f| d\mu$. Isso explica o motivo da parte positiva de $\log |f|$ ser sempre integrável. Assim, se $\log|f|$ não for integrável, então é pela parte negativa de $\log|f|$ não ser integrável, ou seja, a integral da parte negativa de $\log|f|$ é $+\infty$. Assim, faz sentido dizer que, no caso de $\log|f|$ não estar em L^1, então $\int_X \log|f|d\mu = -\infty$.

Vamos aqui seguir o roteiro dado pelo livro. Assuma então, primeiro, que $|f(x)| > 0$ para μ-quase todo $x \in X$. Escolha $p_1 \in (0, p_0)$. Defina $\phi : [0, p_1] \to \mathbb{R}$ dada por $\phi(p) = \int_X |f|^p d\mu$ para $p \in (0, p_1]$ e $\phi(0) = 1$.

Afirmamos que ϕ é contínua. Primeiro, de acordo com o problema 37 (que se resolve utilizando os conjuntos A e B sem maiores problemas usando a dica do livro), temos $\lim_{p\to 0^+} \phi(p) = 1$ pois $\mu(X) = 1$ e $0 < |f(x)| < +\infty$ para μ-quase todo $x \in X$. Isso mostra que ϕ é contínua em 0. Seja $p \in (0, p_1]$ e $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergindo para p com $p_n \in [0, p_1]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Queremos mostrar que $\phi(p_n) \to \phi(p)$. Temos $|f|^{p_n} \to |f|^p$ simplesmente para todo $x \in X$ (inclusive caso $f(x) = 0$ ou $|f(x)| = +\infty$). Como $p_n \to p$, existem $r, s \in (0, p_0)$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $r < p < s$ e, para todo $n \geq n_0$, $r < p_n < s$. Isso nos permite usar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue em $F_n = |f|^{p_n}\chi_A$ e $G_n = |f|^{p_n}\chi_B$, sendo $F_n, G_n : X \to \mathbb{R}$, da seguinte forma. Considere $n \in \mathbb{N}$ com $n \geq n_0$. Para $x \in A$, $|f(x)| \in (0, 1]$, o que dá

$$0 \leq |f(x)|^{p_n} = e^{p_n \log|f(x)|} \leq e^{r \log|f(x)|} = |f(x)|^r$$

e, para $x \in B$, $|f(x)| \in (1, \infty)$, donde

$$0 \leq |f(x)|^{p_n} = e^{p_n \log|f(x)|} \leq e^{s \log|f(x)|} = |f(x)|^s.$$

Ou seja, tanto $F_n = |F_n| \leq |f|^r\chi_A$ e $G_n = |G_n| \leq |f|^s\chi_B$. Sendo $s, r \in (0, p_0)$, temos $|f|^s, |f|^r \in L^1$ e, com maior motivo, $|f|^s\chi_B, |f|^r\chi_A \in L^1$. Aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos $\lim_{n\to\infty} \int_A |f|^{p_n} d\mu = \int_A |f|^p d\mu$ e $\lim_{n\to\infty} \int_B |f|^{p_n} d\mu = \int_B |f|^p d\mu$ (acima, $n > n_0$ é arbitráriio), o que mostra $\lim_{n\to\infty} \phi(p_n) = \phi(p)$. A arbitrariedade de $p \in (0, p_1]$ e $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \to p$ com $p_n \in [0, p_1]$ para todo $n \in \mathbb{N}$ dá que ϕ é contínua em todo $(0, p_1]$. Como já foi mostrado que ϕ é contínua em 0, temos ϕ contínua.

Queremos agora mostrar que ϕ é diferenciável em $(0, p_1)$ para aplicar então o

Teorema do Valor Médio. Seja $p \in (0, p_1)$ e $r > 0$ tal que para todo $h \in (-r, r)$, tem-se $p + h \in (0, p_1)$. Queremos mostrar o seguinte.

$$\lim_{h \to 0} \frac{\phi(p+h) - \phi(p)}{h} = \int_X |f|^p \log |f| d\mu.$$

Do jeito que faremos esta demonstração, mostrar o limite acima envolve também mostrar que Além disso, queremos mostrar que $|f|^p \log |f| \in L^1$. Vamos fazer isso primeiro.

Para ver que $|f|^p \log |f| \in L^1$ considere A e B, de novo. Que $|f|^p \log |f| \chi_B$ está em L^1 é mais simples (esta é a parte positiva de $|f|^p \log |f|$). Seja $h \in (-r, r)$. Temos $|f|^{p+h} \in L^1$. Seja $x \in B$. Temos $0 < \log |f(x)|^h < |f(x)|^h$, o que dá $0 < |f(x)|^p \log |f(x)| < \frac{1}{h} |f(x)|^{p+h}$. Isso mostra $\int_X |f|^p \log |f| \chi_B < \infty$, ou seja, a parte positiva de $|f|^p \log |f|$ tem integral finita. Para parte negativa, considere a função auxiliar $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definita como $\gamma(a) = 0$ para $a = 0$ e $\gamma(a) = a^p \log a$ para $a \in (0, 1]$. Usando a Regra de L'Hospital, temos lim $\lim_{a \to 0^+} \gamma(a) = 0$, o que dá γ contínua. Sendo $[0, 1]$ compacto, existe $K > 0$ tal que para todo $a \in [0, 1]$, temos $|\gamma(a)| \leq K$. Assim a parte negativa de $|f|^p \log |f|$ tem integral finita pois

$$\int_A -|f|^p \log |f| d\mu \leq \int_A K \leq K\mu(X) = K < \infty.$$

Isso termina a prova de que $|f|^p \log |f| \in L^1$ (que é mensurável é claro pois f é).

Seguiremos agora para a prova de que ϕ é diferenciável em p. Primeiro, note que, para $h \in (-r, r) \setminus \{0\}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\phi(p+h) - \phi(p)}{h} &= \int_X |f|^p \left(\frac{|f|^h - 1}{h} \right) d\mu \\ &= \int_X |f|^p \left(\frac{|f|^h - 1}{h} \right) \chi_A d\mu + \int_X |f|^p \left(\frac{|f|^h - 1}{h} \right) \chi_B d\mu. \end{aligned}$$

Defina as funções $\alpha, \beta : (-r, 0) \cup (0, r) \to \mathbb{R}$ dadas por

$$\alpha(h) = \int_X |f|^p \left(\frac{|f|^h - 1}{h} \right) \chi_A d\mu$$

e

$$\beta(h) = \int_X |f|^p \left(\frac{|f|^h - 1}{h} \right) \chi_B \, d\mu.$$

O que segue é a conta de quatro limites: $\lim_{h \to 0^+} F(h)$ e $\lim_{h \to 0^-} F(h)$, para $F \in \{\alpha, \beta\}$. A estratégia é sempre a mesma. Primeiro vamos ver que α (ou β dependendo do caso) possui uma certa monotonicidade, o que garante a existência do limite para $h \to 0^+$ (ou 0^-). A partir daí, basta calcular o limite para uma certa sequência $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergindo para 0 de acordo com o tipo de limite. Esta segunda parte, fazemos usando o Teorema da Convergência Monótona ou então o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (dependendo do caso em que estamos). O que resta para mostrar que ϕ é diferenciável em p é, essencialmente, quatro aplicações desta estratégia.

Defina, para $a \in (0, \infty)$, a função $g_a : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $g_a(h) = \frac{a^h - 1}{h}$ e também defina $q_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $q_a(h) = \log(a^h) + \frac{1}{a^h} - 1$.

Seja $a > 0$ e $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Temos

$$g_a'(h) = \frac{a^h \log(a^h) + 1 - a^h}{h^2}$$

e também $\operatorname{sgn}(g_a'(h)) = \operatorname{sgn}(q_a(h))$. Além disso,

$$q_a'(h) = (\log a) \left(1 - \frac{1}{a^h} \right).$$

Assim, temos a seguinte análise de casos:

1. $a \in (0, 1)$ e $h > 0$. Aqui $q_a'(h) > 0$ pois $\log a < 0$ e $a^h \in (0, 1)$, o que dá $1 - \frac{1}{a^h} < 0$. Isso implica em q_a ser crescente estritamente em $[0, \infty)$. Daí $q_a(h) > q_a(0) = 0$. Daí $g_a'(h) > 0$. Então g_a é crescente em $(0, \infty)$. Isso implica em α ser monótona não decrescente em $(0, r)$.

2. $a \in (1, \infty)$ e $h > 0$. Aqui $q_a'(h) > 0$ pois $\log a > 0$ e $a^h > 1$, o que dá $1 - \frac{1}{a^h} > 0$. Isso dá q_a crescente em $[0, \infty)$ e daí $q_a(h) > q_a(0) = 0$. Isso dá $\operatorname{sgn}(g_a'(h)) = 1$ e g_a crescente em $(0, \infty)$. Sendo assim, β é monótona não decrescente em $(0, r)$.

3. $a \in (0,1)$ e $h < 0$. Aqui $q_a'(h) < 0$ pois $\log a < 0$ e $a^h > 1$, o que dá $1 - \frac{1}{a^h} > 0$. Isso implica em q_a ser decrescente em $(-\infty, 0]$, o que dá $q_a(h) > q_a(0) = 0$. Daí g_a é crescente em $(-\infty, 0)$. Isso implica em α ser monótona não decrescente $(-r, 0)$.

4. $a \in (1, \infty)$ e $h < 0$. Aqui $q_a'(h) < 0$ pois $\log a > 0$ e $a^h \in (0,1)$ o que dá $1 - \frac{1}{a^h} < 0$. Assim q_a é decrescente em $(-\infty, 0]$ e, logo, $q_a(h) > q_a(0) = 0$. Daí g_a é crescente em $(-\infty, 0)$. Isso implica em β ser monótona não decrescente em $(-r, 0)$.

As quatro análises de casos acima nos dão que existem os quatro limites abaixo:

$$\lim_{h \to 0^+} \alpha(h), \lim_{h \to 0^-} \alpha(h), \lim_{h \to 0^+} \beta(h), \lim_{h \to 0^-} \beta(h).$$

Vamos calcular $\lim\limits_{h \to 0^+} \alpha(h)$. Considere $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ decrescente tal que $0 < h_n < \frac{r}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e também tal que $\lim\limits_{n \to \infty} h_n = 0$. Defina $F_n = |f|^p \left(\frac{|f|^{h_n} - 1}{h_n}\right) \chi_A$. Dado $x \in A$ e $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ com $n_1 < n_2$, temos $F_{n_2}(x) \leq F_{n_1}(x) < 0$ (use a análise feita no caso 1 acima). Além disso, $\lim\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n = |f|^p \log |f| \chi_A$ pontualmente. Assim, temos $\{-F_n\}_{n=1}^{\infty}$ monótona não decrescente pontualmente convergindo para $-|f|^p \log |f| \chi_A$. Pelo Teorema da Convergência Monótona, temos $\lim\limits_{n \in \mathbb{N}} \int_X -F_n d\mu = \int -|f|^p \log |f| \chi_A$ e, logo, $\lim\limits_{n \in \mathbb{N}} \alpha(h_n) = \int |f|^p \log |f| \chi_A$. Isso nos dá $\lim\limits_{h \to 0^+} \alpha(h) = \int |f|^p \log |f| \chi_A$.

Vamos calcular $\lim\limits_{h \to 0^+} \beta(h)$. De novo, já sabemos da existência do limite. Considere $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ decrescente tal que $0 < h_n < \frac{r}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e também tal que $\lim\limits_{n \to \infty} h_n = 0$. Defina $F_n = |f|^p \left(\frac{|f|^{h_n} - 1}{h_n}\right) \chi_B$. Dado $x \in B$, temos $0 < F_n(x) < |f(x)|^p \left(\frac{|f(x)|^{r/2} - 1}{r/2}\right)$ (considere a análise de caso 2 feita acima). Sabemos que $\lim\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n = |f|^p \log |f| \chi_B$ pontualmente. Sendo $|f|^p \left(\frac{|f|^{r/2} - 1}{r/2}\right) \in L^1$ não negativa e F_n não negativa também, então temos, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, $\lim\limits_{h \to 0^+} \beta(h) = \int_X |f|^p \log |f| \chi_B d\mu$.

Vamos calcular $\lim\limits_{h \to 0^-} \alpha(h)$. Considere $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ crescente tal que $-\frac{r}{2} < h_n < 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e também tal que $\lim\limits_{n \to \infty} h_n = 0$. Defina $F_n = |f|^p \left(\frac{|f|^{h_n} - 1}{h_n}\right) \chi_A$.

Aqui, dados $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ com $n_1 < n_2$, temos $0 \leq F_{n_1} \leq F_{n_2}$. O Teorema da Convergência Monótona, agora, implica em $\lim_{h \to 0^-} \alpha(h) = \int_X |f|^p \log |f| \chi_A d\mu$.

Finalmente, vamos calcular $\lim_{h \to 0^-} \beta(h)$. Considere $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ crescente tal que $-\frac{r}{2} < h_n < 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e também tal que $\lim_{n \to \infty} h_n = 0$. Defina $F_n = |f|^p \left(\frac{|f|^{h_n} - 1}{h_n} \right) \chi_B$. Dado $n \in \mathbb{N}$, temos $|F_n| \leq |f|^p \left| \frac{|f|^{-r/2} - 1}{-r/2} \right|$ (veja análise caso 4 acima). O Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue nos dá $\lim_{h \to 0^-} \beta(h) = \int_X |f|^p \log |f| \chi_B d\mu$.

Com isso, $\lim_{h \to 0} \frac{\phi(p+h) - \phi(p)}{h}$ existe (no sentido tradicional de ser um número real) e é igual a $\int_X |f|^p \log |f| d\mu$. Assim, sendo $p \in (0, p_1)$ qualquer, temos ϕ diferenciável em $(0, p_1)$ e contínua em $[0, p_1]$ sendo que para todo $p \in (0, p_1)$, $\phi'(p) = \int_x |f|^p \log |f| d\mu$.

Defina agora $\psi : [0, p_1] \to \mathbb{R}$ dada por $\psi(p) = \log \phi(p)$. Assim, ψ é contínua em $[0, p_1]$ e diferenciável em $(0, p_1)$ com

$$\psi'(p) = \frac{1}{\|f\|_p^p} \int_X |f|^p \log |f| d\mu,$$

para $p \in (0, p_1)$. O Teorema do valor médio nos dá que para todo $p \in (0, p_1)$, existe $q \in (0, p)$ tal que $\psi(p) - \psi(0) = \psi'(q)p$, ou seja,

$$\log \|f\|_p = \|f\|_q^{-q} \int_X |f|^q \log |f| d\mu.$$

Já sabemos que $\lim_{q \to 0^+} \|f\|_q^q = 1$. Resta ver que $\lim_{q \to 0^+} \int_X |f|^q \log |f| d\mu = \int_x \log |f| d\mu$. É claro que para todo $x \in A \cup B$, temos

$$\lim_{q \to 0^+} |f(x)|^q \log |f(x)| = \log |f(x)|.$$

Para concluir que podemos passar o limite para dentro da integral, usaremos, de novo, os conjuntos A e B junto dos teoremas de convergência (monótona e dominada).

Primeiro considere o caso em B. Dado $x \in B$ e $q_1, q_2 \in (0, \infty)$ com $q_1 < q_2$, temos $|f(x)|^{q_1} \log |f(x)| < |f(x)|^{q_2} \log |f(x)|$. Logo $q \in (0, p_1) \mapsto \int_B |f|^q \log |f| d\mu$

é monótona, o que implica na existência do limite $\lim\limits_{q\to 0^+}\int_B |f|^q \log|f| d\mu$. Considere então uma sequência $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ estritamente decrescente, de termos positivos, convergindo para 0. A sequência de funções $F_n = |f|^{q_n}\log|f|\chi_B$ converge pontualmente para a função $\log|f|\chi_B$. Além disso $0 \le |F_n| = F_n \le F_1 = |F_1| \in L^1$. O Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue nos dá então que $\lim\limits_{q\to 0^+}\int_B |f|^q \log|f| d\mu = \int_B \log|f| d\mu$.

O caso em A se dá pelo Teorema da Convergência Monótona. Dados $x \in A$, $q_1, q_2 \in (0, p_1)$ com $q_1 < q_2$, temos $|f(x)|^{q_1}\log|f(x)| \le |f(x)|^{q_2}\log|f(x)|$. Isso implica na monotonicidade de $q \in (0,p_1) \mapsto \int_A |f|^q \log|f| d\mu$ e logo na existência do limite $\lim\limits_{q\to 0^+}\int_A |f|^q \log|f| d\mu$. Considere agora uma sequência $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ estritamente decrescente, de termos positivos e convergindo para 0. Considere a sequência de funções $F_n = -|f|^{q_n}\log|f|\chi_A$. Esta converge pontualmente para $-\log|f|\chi_A$. Além disso, a análise acima nos dá que $F_n \le F_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. O Teorema da Convergência Monótona nos dá então que $\lim\limits_{q\to 0^+}\int_A -|f|^q \log|f| d\mu = \int_A -\log|f| d\mu$.

Daqui para frente, precisaremos separar os dois seguintes casos: $\log|f| \in L^1$; $\log|f| \notin L^1$. No caso em que $\log|f| \in L^1$, temos $\lim\limits_{q\to 0^+}\int_A |f|^q \log|f| d\mu = \int_A \log|f| d\mu$, e assim, $\lim\limits_{q\to 0^+}\int_X |f|^q \log|f| d\mu = \int_X \log|f| d\mu$. Isso implica em

$$\lim_{p\to 0^+} \log \|f\|_p = \int_X \log|f| d\mu.$$

A continuidade da exponencial nos dá $\lim\limits_{p\to 0^+}\|f\|_p = e^{\int_X \log|f| d\mu}$ (isso resolve o caso em que $|f| > 0$ μ-quase sempre e $\log|f| \in L^1$). Caso $\log|f| \notin L^1$, temos $\lim\limits_{q\to 0^+}\int_A |f|^q \log|f| d\mu = -\infty$. Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{q\to 0^+}\|f\|_q^{-q}\int_X |f|^q\log|f| d\mu &= \lim_{q\to 0^+}\|f\|_q^{-q}\left(\int_A |f|^q \log|f| d\mu + \int_B |f|^q \log|f| d\mu\right) \\ &= -\infty.\end{aligned}$$

Isso implica em $\lim\limits_{p\to 0^+}\log\|f\|_p = -\infty$, o que dá $\lim\limits_{p\to 0^+}\|f\|_p = 0$ (note que isso é exatamente como o caso $\log|f| \notin L^1$ deve ser interpretado como dito no enunciado do exercício pois o que temos aqui é algo como $\int_X \log|f|d\mu = -\infty$, o que dá $e^{\int_X \log|f|d\mu} = 0$).

Isso termina o tratamento do caso $|f(x)| > 0$ para μ-quase todo $x \in X$. Trataremos, de agora em diante, o outro caso.

Ponha $C = \{x \in X : |f(x)| \neq 0\}$ e assuma $\mu(C) > 0$. Note que este caso é uma forma na qual $\log|f| \notin L^1$, o que significa que precisamos mostrar que $\lim\limits_{p\to 0^+} \|f\|_p = 0$.

Caso $\mu(C) = 1$, $\|f\|_p = 0$ para todo $p > 0$ e não há nada a fazer. Suponha então que $\mu(C) \in (0, 1)$.

O que faremos aqui (seguindo de novo a dica do livro) é trabalhar com um outro espaço de medida adicional: $(Y, \mathcal{N}, \nu)$, sendo $Y = X \setminus C$, $\mathcal{N} = \{W \setminus C : W \in \mathcal{M}\}$ e $\nu(W) = \frac{\mu(W)}{\mu(X\setminus C)}$ (note que $\mu(C) < 1$ dá que $\mu(X \setminus C) > 0$). Esta tripla nos dá um espaço de medida. $\mathcal{N}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de Y pois: primeiro, todo elemento em $\mathcal{N}$ é um subconjunto de Y; segundo, dado $W\ C \in \mathcal{N}$ com $W \in \mathcal{M}$, temos $Y \setminus (W \setminus C) = (X \setminus W) \setminus C \in \mathcal{N}$; e, terceiro, $\mathcal{N}$ é claramente fechado por uniões enumeráveis. Que ν é medida é claro. Assim, temos $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ é um espaço de medida com $\nu(Y) = 1$.

O que queremos mostrar agora é que dado $g : X \to [0, \infty]$ mensurável em $(X, \mathcal{M})$, então $g|_Y$ é mensurável em $(Y, \mathcal{N})$ e $\int_Y g|_Y d\nu = \frac{1}{\mu(X\setminus C)} \int_Y g d\mu$. Isso terminará a resolução por causa do seguinte. $|f|^{p_1}$ é $(X, \mathcal{M})$ mensurável e logo $|f|_Y|^{p_1}$ também é. Só que $|f|_Y(x)| > 0$ para todo $x \in Y$, o que dá $\lim\limits_{p\to 0^+} \left(\int_Y |f|_Y|^p d\nu\right)^{\frac{1}{p}} = e^{\int_Y \log|f|_Y|d\nu}$ pelo que já foi provado no caso anterior. Assim, temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to 0^+} \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} &= \lim_{p\to 0^+} \left(\int_Y |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \lim_{p\to 0^+} \left(\mu(X \setminus C) \int_Y |f|^p d\nu\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \lim_{p\to 0^+} \left[\mu(X \setminus C)^{\frac{1}{p}} \left(\int_Y |f|^p d\nu\right)^{\frac{1}{p}}\right]. \\
&= \left[\lim_{p\to 0^+} \mu(X \setminus C)^{\frac{1}{p}}\right] \left[\lim_{p\to 0^+} \left(\int_Y |f|^p d\nu\right)^{\frac{1}{p}}\right] = 0.
\end{aligned}$$

pois $\lim\limits_{p\to 0^+} \left(\int_Y |f|^p d\nu\right)^{\frac{1}{p}} \in \mathbb{R}$ e $\lim\limits_{p\to 0^+} \mu(X \setminus C)^{\frac{1}{p}} = 0$.

O que nos resta então é mostrar que dado $g : X \to [0, \infty]$ mensurável em $(X, \mathcal{M})$, então $g|_Y$ é mensurável em $(Y, \mathcal{N})$ e $\int_Y g|_Y d\nu = \frac{1}{\mu(X\setminus C)} \int_Y g d\mu$. Seja P Borel mensurável de $\overline{\mathbb{R}}$. Temos $g|_Y^{-1}(P) = Y \cap g^{-1}(P) = (X \setminus C) \cap g^{-1}(P) = g^{-1}(P) \setminus C \in \mathcal{N}$ (uma argumentação análogo extende o que foi provado para funções $g : X \to F$, sendo $F = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ ou $\overline{\mathbb{R}}$). Considere agora uma sequência de funções simples $\phi_n : Y \to [0, \infty)$ com $0 \leq \phi_n(x) \leq \phi_{n+1}(x) \leq g(x)$ para todo $x \in Y$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, e também com $\phi_n \to g$ pontualmente. Para cada $n \in \mathbb{N}$, temos $\phi_n = \sum_{i=1}^n a_{i,n}\chi_{E_{i,n}}$ sendo os $E_{i,n}$ mensuráveis em $(X, \mathcal{M})$ dois-a-dois disjuntos para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado e, claro, os $a_{i,n} \geq 0$ para todo $i, n \in \mathbb{N}$. Temos $\phi_n|_Y$ também uma função simples de Y em $[0, \infty)$ dada por $\phi_n|_Y = \sum_{i=1}^n a_{i,n}\chi_{E_{i,n}\cap Y}$. Temos

$$\begin{aligned}
\int_Y \phi_n|Y d\nu &= \sum_{i=1}^n a_{i,n}\nu(E_{i,n} \cap Y) \\
&= \sum_{i=1}^n a_{i,n} \frac{\mu(E_{i,n} \cap Y)}{\mu(Y)} \\
&= \mu(X \setminus C)^{-1} \sum_{i=1}^n a_{i,n} \int_Y \chi_{E_{i,n}} d\mu \\
&= \mu(X \setminus C)^{-1} \int_Y \phi_n d\mu
\end{aligned}$$

O Teorema da Convergência monótona (aplicado duas vezes; uma em $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e outra em $(Y, \mathcal{N}, \nu)$) agora implica no que queremos.

$$\begin{aligned}
\int_Y g|_Y d\nu &= \lim_{n\to+\infty} \int_Y \phi_n|_Y d\nu \\
&= \lim_{n\to+\infty} \mu(X \setminus C)^{-1} \int_Y \phi_n d\mu \\
&= \mu(X \setminus C)^{-1} \int_Y g d\mu.
\end{aligned}$$

18 Capítulo 11 - Exercício 8

O que faremos aqui é dar a prova completa do teorema.

No caso em que X é σ-finito, aplica-se a o resultado obtido logo antes do enunciado do teorema para a função $|f|^p$. Assim, obtem-se o seguinte:

$$\int_X |f|^p d\mu = \int_0^\infty \mu(\{x \in X : |f(x)|^p > y\})dy.$$

Considere a função $F : (0, \infty) \to [0, \infty]$ dada por $F(y) = \mu(\{x \in X : |f(x)|^p > y\})$. Temos dois casos a considerar aqui. Um é o que $F(y) + \infty$ para algum $y \in (0, \infty)$. Neste caso, $|f|^p \notin L^1$ pois se $K = \{x \in X : |f(x)|^p > y\}$, então $\mu(K) = +\infty$ e $\int_X |f|^p d\mu \geq \int_K |f|^p d\mu = +\infty$. Assim, $\int_X |f|^p d\mu = +\infty$. Sendo $K = \{x \in X : |f(x)| > y^{\frac{1}{p}}\}$, temos $\int_0^\infty \mu(\{x \in X : |f(x)| > y\}) p s^{p-1} ds = +\infty$. Isso nos dá

$$\int_X |f|^p d\mu = \int_0^\infty \mu(\{x \in X : |f(x)| > y\}) p s^{p-1} ds.$$

Ainda no caso X σ-finito, temos o caso em que $F(y) < \infty$ para todo $y \in (0, \infty)$. Neste caso F é contínua. Não provaremos que F é contínua em detalhe, porém a ideia da prova é a seguinte. F é monótona não crescente. Isso garante a existência dos limites laterais de F em todos os pontos de $(0, \infty)$. Use que $F(y) < \infty$ para todo $y \in (0, \infty)$ junto dos teoremas de continuidade de medida ($\mu(\cup A_n) = \lim \mu(A_n)$ para $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ crescente; $\mu(\cap A_n) = \lim \mu(A_n)$ para $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ decrescente com $\mu(A_1) < \infty$) para concluir então a continuidade da F (note que sabendo das existências dos limites laterais, basta mostrar que são iguais usando alguma sequência em particular convenientemente escolhida). Ponha agora $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por $g(s) = s^p$. Temos $g'(s) = ps^{p-1}$

$(0 < p < \infty)$ e

$$\begin{aligned}
\int_X |f|^p d\mu &= \int_0^\infty F(y)dy \\
&= \left[\lim_{a<1;a\to 0^+} \int_a^1 F(y)dy\right] + \left[\lim_{a>1;a\to+\infty} \int_1^a F(y)dy\right] \\
&= \left[\lim_{a<1;a\to 0^+} \int_{a^{\frac{1}{p}}}^1 F(g(s))g'(s)ds\right] + \left[\lim_{a>1;a\to+\infty} \int_1^{a^{\frac{1}{p}}} F(g(s))g'(s)ds\right] \\
&= \int_0^\infty \mu(\{x \in X : |f(x)| > s\})ps^{p-1}ds
\end{aligned}$$

Note que $F(g(s)) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > s\})$ para $s \in (0, \infty)$. Isso resolve o caso X σ-finito. A continuidade de F foi usada na aplicação do teorema da mudança de variáveis nas integrais dentro dos limites.

Considere agora X não σ-finito. Vamos mostrar que o resultado se reduz ao caso σ-finito. Ainda com $F : (0, \infty) \to [0, \infty]$ dada por $F(y) = \mu(\{x \in X : |f(x)|^p > y\})$, os dois casos de antes se repetem aqui. Primeiro suponha que para exista $y > 0$ tal que $F(y) = +\infty$. Isso implica em $|f|^p \notin L^1$ e logo $\int_X |f|^p d\mu = +\infty$. Além disso $\{x \in X : |f(x)|^p > y\} = \{x \in X : |f(x)| > y^p\}$. Isso implica em $\mu(\{x \in X : |f(x)| > y^p\}) = +\infty$. Logo, $\int_0^\infty \mu(\{x \in X : |f(x)| > s\})ps^{p-1}ds = +\infty$. Assim:

$$\int_X |f|^p d\mu = \int_0^\infty \mu(\{x \in X : |f(x)| > s\})ps^{p-1}ds.$$

No caso em que $F(y) < \infty$ para todo $y \in (0, \infty)$, defina $A_n = \left\{x \in X : |f(x)| > \frac{1}{n}\right\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Temos então $\mu(A_n) < \infty$. Ponha $A = \{x \in X : |f(x)| > 0\}$. $A = \cup A_n$. Isso nos dá

$$\int_X |f|^p d\mu = \int_A |f|^p d\mu.$$

Defina agora um novo espaço de medida. Ponha $\mathcal{N} = \{E \cap A : E \in \mathcal{M}\}$ (onde $\mathcal{M}$ é a σ-álgebra em questão sobre X) e ponha $\nu(E) = \mu(E)$, para $E \in \mathcal{N}$. É de verificação fácil que $(A, \mathcal{N}, \nu)$ é um espaço de medida σ-finito. Não somente isso, dado $\phi : X \to [0, \infty]$, $\phi|_A$ é $\mathcal{N}$-mensurável e $\int_A \phi|_A d\nu = \int_A \phi d\mu$ (aproxime ϕ

por uma sequência monótona não decrescente de funções simples, positivas de imagem em $[0, \infty)$ e aplique o Teorema da Convergência Monótona). O teorema provado para o caso σ-finito junto da observação de que $\int_X |f|^p d\mu = \int_A |f|^p d\mu$ nos dá a conclusão buscada. De fato:

$$\begin{aligned}
\int_X |f|^p d\mu &= \int_A |f|^p d\mu \\
&= \int_A |f|^p|_A d\nu \\
&= \int_A |f|_A|^p d\nu \\
&= \int_0^\infty \nu(\{x \in X : |f|_A(x)| > s\}) p s^{p-1} ds \\
&= \int_0^\infty \mu(A \cap \{x \in X : |f|_A(x)| > s\}) p s^{p-1} ds \\
&= \int_0^\infty \mu(\{x \in X : |f(x)| > s\}) p s^{p-1} ds.
\end{aligned}$$